Title	バーンズの多重ゼータ函数の函数等式について(解析的整数論とその周辺)
Author(s)	吉元, 昌己
Citation	数理解析研究所講究録 (2006), 1511: 210-215
Issue Date	2006-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/58592
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1511 巻 2006 年 210-215

バーンズの多重ゼータ函数の函数等式について

日本学術振興会特別研究員 (PD)　吉元 昌己 (Masami Yoshimoto)
JSPS Research Fellow

本原稿は, Barnes の論文 [1] の中で議論されていない関数等式を求めたものである.[1]

Definition ([1, §15]). $r, i_k \in \mathbb{N}$, $\kappa = \sum_{k=1}^{r} i_k$ とする. 基底 $\underline{\omega}$ を

$$\underline{\omega} = (\omega_1^{(1)}, \ldots, \omega_1^{(i_1)}, \ldots, \omega_r^{(1)}, \ldots, \omega_r^{(i_r)})$$

とする. ここで $\omega_k^{(m)}$ $(1 \le k \le r,\ 1 \le m \le i_k)$ は

$$\begin{cases} |\omega_k^{(1)}| \le |\omega_k^{(2)}| \le \cdots \le |\omega_k^{(i_k)}|, \\ \arg \omega_k^{(1)} = \arg \omega_k^{(2)} = \cdots = \arg \omega_k^{(i_k)}, \\ \arg \omega_1^{(1)} < \arg \omega_2^{(1)} < \cdots < \arg \omega_r^{(1)}, \\ \arg \omega_r^{(1)} - \arg \omega_1^{(1)} < \pi \end{cases}$$

を満たす. また α は原点を通る直線 p によって分けられる半平面で $\underline{\omega}$ と同じ側にあるものとする.

このとき Barnes の多重ゼータ函数は

$$\zeta_\kappa(s, \alpha \mid \underline{\omega}) = \sum_{\underline{m} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^\kappa} \frac{1}{(\underline{m} \cdot \underline{\omega} + \alpha)^s} \quad (\mathrm{Re}\, s = \sigma > \kappa)$$

で定義される. ここで $\underline{m} \cdot \underline{\omega}$ は $\underline{m}$ と $\underline{\omega}$ の内積を意味する. $\zeta_\kappa(s, \alpha \mid \underline{\omega})$ は全 s-平面に解析接続され, $s = 1, 2, \ldots, \kappa$ に高々1位の極を持つ.

Definition. 無理数度の定義.

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする. このとき無理数 α が無理数度 μ を持つとは, 任意の正数 ε に対して, 正定数 $c = c(\varepsilon)$ が存在し, 不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^{\mu + \varepsilon}}$$

が全ての有理数 p/q $(q \ge c)$ に対して成り立つことをいう. このような実数 μ の下限を α の無理数度と呼ぶ.

また,

$$|\sin \pi q \alpha| > \frac{c}{q^{\mu - 1 + \varepsilon}}$$

と同値.

---

[1] 基底がすべて実数の場合 [6] の中で既に紹介されています.

Theorem ([5]). $\omega_k^{(1)},\ldots,\omega_k^{(i_k)}$ $(1\le k\le r)$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立とし, α は以下の条件 (a), (b), (c) のうちのいずれかを満たすものとする:
(a) すべての k $(1\le k\le r)$ に対して

$$\sum_{1\le j<k}\sum_{m=1}^{i_j}\operatorname{Im}\frac{\omega_j^{(m)}}{\omega_k^{(1)}}<\operatorname{Im}\frac{\alpha}{\omega_k^{(1)}}<\sum_{k<j\le r}\sum_{m=1}^{i_j}\operatorname{Im}\frac{\omega_j^{(m)}}{\omega_k^{(1)}},$$

(b) ある k に対して

$$\alpha=c\omega_k^{(1)}+\sum_{1\le j<k}\sum_{m=1}^{i_j}\omega_j^{(m)},\quad 0<c<\sum_{m=1}^{i_k}\frac{\omega_k^{(m)}}{\omega_k^{(1)}},$$

(c) ある k に対して

$$\alpha=c\omega_k^{(1)}+\sum_{k<j\le r}\sum_{m=1}^{i_j}\omega_j^{(m)},\quad 0<c<\sum_{m=1}^{i_k}\frac{\omega_k^{(m)}}{\omega_k^{(1)}}.$$

また $i_k\ge 2$ $(1\le k\le r)$ のとき $\omega_k^{(m)}/\omega_k^{(n)}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $(1\le m<n\le i_k)$ とする.
このとき $\sigma<1$ で函数等式

$$(1)\qquad \zeta_\kappa(s,\alpha\mid\underline{\omega})=\Gamma(1-s)2^{s+\kappa-1}\pi^{s-1}\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{i_k}(\omega_k^{(m)})^{-s}\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2\pi\frac{n}{\omega_k^{(m)}}\left(\alpha-\frac{1}{2}\sum_j\sum_l'\omega_j^{(l)}\right)+\frac{\pi}{2}(s-\kappa)\right)}{n^{1-s}\prod_j\prod_l'\sin\left(\pi n\omega_j^{(l)}/\omega_k^{(m)}\right)}$$

が成り立つ. ここで

$$\textstyle\sum_j\sum_l'=\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\(j,l)\ne(k,m)}}^{r}\sum_{l=1}^{i_j},\quad \textstyle\prod_j\prod_l'=\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\(j,l)\ne(k,m)}}^{r}\prod_{l=1}^{i_j}.$$

特に函数等式 (1) の右辺の級数は, α が条件 (a) を満たす場合は $s\in\mathbb{C}$ で, またある k $(1\le k\le r)$ で α が条件 (b) または (c) を満たし, $i_k=1$ または $\omega_k^{(m)}/\omega_k^{(n)}$ $(i_k\ge 2,\ 1\le m<n\le i_k)$ の無理数度 $\mu_{m,n}$ が有限な無理数ならば (1) の右辺の級数は $\sigma<1-K$ で絶対収束する.[2] ここで

$$K=\max_{1\le m\le\kappa}\left(\sum_{\substack{l=1\\l\ne m}}^{\kappa}\mu_{l,m}-\kappa\right)+2.$$

[2]講演の3日ほど前に江上先生からの御指摘により, 絶対収束についての議論に間違いがあることが分かりました. この原稿の Theorem は自明な評価しかしていません. 更なる改良が望まれますが, 現時点では出来ていません. しかし, [4] の結果を応用, 拡張して改良されることが期待できます.

Remark 1. Theorem の条件 (a), (b), (c) を満たす領域は具体的には

$$0,\quad \sum_{1\le j\le k}\sum_{1\le m\le i_k}\omega_j^{(m)}\ (1\le k\le r),$$
$$\sum_{k\le j\le r}\sum_{1\le m\le i_k}\omega_j^{(m)}\ (2\le k\le r)$$

を順に結んで出来る多角形から頂点をすべて除いたものである.

また, α が原点以外の頂点の場合, 函数等式 (1) は $\sigma<0$ で成立する. また絶対収束座標については同じ式が成り立つ.

Sketch of proof of Theorem. Contour integral representation

$$\zeta_\kappa(s,\alpha\mid\underline{\omega})=\frac{i\Gamma(1-s)}{2\pi}\int_L\frac{e^{-\alpha z}(-z)^{s-1}}{\prod_{k=1}^{r}\prod_{m=1}^{i_k}\left(1-e^{-\omega_k^{(m)}z}\right)}\mathrm{d}z$$

を用い, 古典的な方法で証明することが出来る.

絶対収束座標は, 無理数度の定義から得られる. □

Remark 2 ([5]). Theorem で "$\omega_k^{(1)},\dots,\omega_k^{(i_k)}$ $(1\le k\le r)$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立" と条件をつけているが, 一次従属になる場合も函数等式を得ることは出来る. しかし, 式が非常に複雑になる為ここでは詳しく述べないが, $\mathbb{Q}$ 上一次独立な基底を持つ多重ゼータ函数を, 基底を変数と見なして微分したものを利用して表示することが可能であるから, 結局上述の定理の場合に帰着する.

Definition ([1, §§23–24]).

$$\log\frac{\Gamma_\kappa(\alpha\mid\underline{\omega})}{\rho_\kappa(\underline{\omega})}:=\frac{\partial}{\partial s}\zeta_\kappa(s,\alpha\mid\underline{\omega})\Big|_{s=0}=\zeta_\kappa'(0,\alpha\mid\underline{\omega}).$$

特に $\kappa=1$, $\underline{\omega}=1$ のとき

$$\Gamma_1(\alpha\mid 1)=\Gamma(\alpha),\ \ \rho_1(1)=\sqrt{2\pi}.$$

Corollary 1. 多重サイン函数 $S_\kappa(\alpha\mid\underline{\omega})$ を

$$\begin{aligned}\log S_\kappa(\alpha\mid\underline{\omega}):=&(-1)^{\kappa+1}\log\Gamma_\kappa(\alpha\mid\underline{\omega})\\&+\log\Gamma_\kappa\Big(\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{i_k}\omega_k^{(m)}-\alpha\mid\underline{\omega}\Big)\\&-(1-(-1)^\kappa)\log\rho_\kappa(\underline{\omega})\end{aligned}$$

で定義する. このとき

$$\begin{aligned}\log S_\kappa(\alpha\mid\underline{\omega})=&2^{1-\kappa}\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{i_k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2\pi\frac{n}{\omega_k^{(m)}}\left(\alpha-\frac12\sum_j\sum_l'\omega_j^{(l)}\right)-\frac{\pi}{2}(\kappa-2)\right)}{n\prod_j\prod_l'\sin\left(\pi n\omega_j^{(l)}/\omega_k^{(m)}\right)}\\&-(1-(-1)^\kappa)\log\rho_\kappa(\underline{\omega}).\end{aligned}$$

Proof. 函数等式 (1) で

$$(-1)^{\kappa+1}\zeta_\kappa(s,\alpha\mid\underline{\omega})+\zeta_\kappa(s,\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{i_k}\omega_k^{(m)}-\alpha\mid\underline{\omega})$$

を s について微分し $s\to 0$ とすることで得られる. □

Appendix: 多重ガンマ函数を含む積分表示

Barnes は論文 [1] の中で

$$\begin{aligned}(2)\qquad &\int_0^z \log\Gamma_r(\alpha+u\mid\underline{\omega})\,\mathrm{d}u\\ &=(\alpha+z)\log\Gamma_r(\alpha+z\mid\underline{\omega})-\alpha\log\Gamma_r(\alpha\mid\underline{\omega})\\ &\quad+\sum_{k=1}^{r}\omega_k\log\frac{\Gamma_{r+1}(\alpha+z\mid\underline{\omega},\omega_k)\Gamma_r(\alpha\mid\underline{\omega})}{\Gamma_{r+1}(\alpha\mid\underline{\omega},\omega_k)\Gamma_r(\alpha+z\mid\underline{\omega})}\\ &\quad+\frac{(-1)^r}{(r+1)!}\left(\prod_{k-1}^{r}\omega_k\right)^{-1}\left(B_{r+1}^{[r]}(\alpha+z\mid\underline{\omega})-B_{r+1}^{[r]}(\alpha\mid\underline{\omega})\right)\end{aligned}$$

を得ている. ここで $B_n^{[\kappa]}(\alpha\mid\underline{\omega})$ は一般化された Bernolli 多項式で,

$$e^{\alpha z}\prod_{k=1}^{r}\prod_{m=1}^{i_k}\frac{\omega_k^{(m)}z}{\left(e^{\omega_k^{(m)}z}-1\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}B_n^{[\kappa]}(\alpha\mid\underline{\omega}),\quad |z|<\min_{1\le k\le r}\left|\frac{2\pi}{\omega_k^{(i_k)}}\right|$$

または

$$B_n^{[\kappa]}(\alpha\mid\underline{\omega})=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}B_m^{[\kappa]}[\underline{\omega}]\alpha^{n-m},$$

$$\prod_{k=1}^{r}\prod_{m=1}^{i_k}\frac{\omega_k^{(m)}z}{\left(e^{\omega_k^{(m)}z}-1\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}B_n^{[\kappa]}[\underline{\omega}],\quad |z|<\min_{1\le k\le r}\left|\frac{2\pi}{\omega_k^{(i_k)}}\right|.$$

で定義される.

また,[2, Corollary 3, (ii)] で $\lambda\in\mathbb{N}$ の時

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\lambda\int_0^z u^{\lambda-1}\log\Gamma(\alpha+u)\mathrm{d}u\\ &=z^\lambda\log\Gamma(\alpha+z)-(-1)^\lambda\sum_{r=0}^{\lambda}c_\lambda(r,\alpha)\log\frac{\Gamma_{r+1}(\alpha+z)}{\Gamma_{r+1}(\alpha)}\\ &\quad-(-1)^\lambda\sum_{l=1}^{\lambda}(-1)^l\left\{\binom{\lambda}{l}\zeta'(l-\lambda)+\frac{B_{\lambda-l+1}(\alpha)}{l(\lambda-l+1)}\right\}z^l-\frac{z^{\lambda+1}}{\lambda+1}\sum_{r=1}^{\lambda}\frac{1}{r}\end{aligned}$$

が成り立つことを示した. ここで $\Gamma_r(z)=\Gamma_r(z\mid\underbrace{1,\ldots,1}_{r})$,

$$c_{n,m}(\alpha)=\frac{(-1)^{n-1-m}}{(n-1)!}\sum_{j=m}^{n-1}\binom{j}{m}S(n,j+1)\alpha^{j-m},$$

$S(n,k)$ は第一種スターリング数である.

上記の結果 (2), (3) を含む一般の式は次のようになる:

Theorem ([5]). $r\in\mathbb{N}$, $\underline{j}=(j_1,j_2,\ldots,j_r)$, $\underline{h}=(h_1,h_2,\ldots,h_r)$, $\underline{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r)$, $\|\underline{j}\|=\sum_{k=1}^{r}j_k$, $\|\underline{h}\|=\sum_{k=1}^{r}h_k$ とし, $\underline{h}\geq 0$ を $h_1,\ldots,h_r\geq 0$ で定義する. また

$$p_r(\underline{j},\underline{h},\underline{\omega}):=\prod_{k=1}^{r}(-1)^{j_k}j_k!S(h_k+1,j_k+1)\omega_k^{h_k}$$

とし, $\underline{\omega^{j+1}}=(\underbrace{\omega_1,\ldots,\omega_1}_{j_1+1},\ldots,\underbrace{\omega_r,\ldots,\omega_r}_{j_r+1})$ とする.

この時, $\lambda\in\mathbb{N}$ とすると

$$\begin{aligned}
&\lambda\int_0^z u^{\lambda-1}\log\Gamma_r(\alpha+u\mid\underline{\omega})du\\
&=z^{\lambda}\log\Gamma_r(\alpha+z\mid\underline{\omega})\\
&\quad-\sum_{m=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{m}(-\alpha)^{\lambda-m}\sum_{\|\underline{h}\|=m,\underline{h}\geq 0}\frac{m!}{h_1!\cdots h_r!}\sum_{j_1=0}^{h_1}\cdots\sum_{j_r=0}^{h_r}p_r(\underline{j},\underline{h},\underline{\omega})\log\frac{\Gamma_{r+\|\underline{j}\|}(\alpha+z\mid\underline{\omega^{j+1}})}{\Gamma_{r+\|\underline{j}\|}(\alpha\mid\underline{\omega^{j+1}})}\\
&\quad-(-1)^r\left(\prod_{k=1}^{r}\omega_k\right)^{-1}\sum_{n=0}^{\lambda-1}\binom{\lambda}{n+1}\frac{(n+1)!}{(r+n+1)!}(-1)^{n+1}H_{n+1}B_{r+n+1}^{[r]}(\alpha+z\mid\underline{\omega})z^{\lambda-n-1}\\
&\quad+\left(\prod_{k=1}^{r}\omega_k\right)^{-1}\frac{\lambda!}{(r+\lambda)!}(-1)^{r+\lambda}H_{\lambda}B_{r+\lambda}^{[r]}(\alpha\mid\underline{\omega})
\end{aligned}$$

が成立する. ここで $H_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$.

References

[1] E. W. Barnes, On the Theory of the Multiple Gamma Function, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **19** (1904), 374–425.

[2] S. Kanemitsu, H. Kumagai and M. Yoshimoto, *Sums involving the Hurwitz zeta-function*, The Ramanujan J. **5** (2001), 5–19.

[3] J. F. Koksma, *Diophantische Approxiationen*, Berlin, Springer, 1936.

[4] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, New York, Wiley, 1974.

[5] M. Yoshimoto, *On Barnes' multiple zeta-function*, (in preparation).

[6] 江上 繁樹, 多重ゼータ関数の初等理論, http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/ant/Seminar/Intensive/Egami.html